Adı Soyadı:

Numarası: **18.04.2022**

MAT206 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-II ARA SINAV SORULARI

Sadece 4 soru cevaplandırınız.

1. $x^2y''-2xy'+2y=0$ denkleminin $y(x)=x^m$, $(x\neq 0, m\in\mathbb{R})$ formundaki çözümlerini bulunuz. Bu çözümlerin lineer bağımsız olduğunu göstererek genel çözümü oluşturunuz.
2. $y'''-2y''-3y'+6y=0$ denkleminin $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-1$ koşullarını sağlayan çözümünü bulunuz.
3. $\{1, x, e^{2x}, e^{-2x}\}$ kümesi bir temel çözüm kümesi oluşturuyorsa bunu temel çözüm kümesi kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz.
4. $y''+2y'+y=\dfrac{x^2}{e^x}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
5. $y'''+9y'=\sin 3x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
6. $y'''+y'=\dfrac{1}{\cos x}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Başarılar... Doç. Dr. Fatma HIRA

Cevaplar

(1) $y=x^m$ çözüm ise denklemi sağlar. Buna göre

$y'=mx^{m-1}$, $y''=m(m-1)x^{m-2}$ olup denklemde yerlerine yazılırsa

$x^2(m(m-1)x^{m-2})-2x\,m\,x^{m-1}+2x^m=0 \Rightarrow m(m-1)x^m-2mx^m+2x^m=0$

$\Rightarrow x^m\{m^2-m-2m+2\}=0$

$\Rightarrow x^m(m^2-3m+2)=0$

$\neq$ 0

$m=1 \Rightarrow y=x$

$m=2 \Rightarrow y=x^2$ iki çözümdür. $m=1,\ m=2$ olur

$W(x,x^2)=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=2x^2-x^2=x^2\neq 0$ olduğundan $\{x,x^2\}$ lineer bağımsızdır. 2. mertebeden denklemin iki lineer bağımsız çözümü bulunduğuna göre genel çözümü $y=c_1x+c_2x^2$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ şeklindedir.

(2) $y'''-2y''-3y'+6y=0$ 3. mertebe sabit katsayılı denklem olup karakteristik denklem $\Rightarrow \lambda^3-2\lambda^2-3\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda-2)-3(\lambda-2)=0$

$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda^2-3)=0$

$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-\sqrt{3})(\lambda+\sqrt{3})=0$

$\Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=\sqrt{3},\ \lambda_3=-\sqrt{3}$ için

$y_1=e^{2x}$, $y_2=e^{\sqrt{3}x}$, $y_3=e^{-\sqrt{3}x}$ lineer bağımsız çözümleri bulunur. Genel çözüm $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{\sqrt{3}x}+c_3e^{-\sqrt{3}x}$ olur.

$y(0)=0 \Rightarrow 0=c_1+c_2+c_3$

$y'(0)=1 \Rightarrow 1=2c_1+\sqrt{3}c_2-\sqrt{3}c_3$

$y''(0)=-1 \Rightarrow -1=4c_1+3c_2+3c_3$

çözülürse $c_1=-1$, $c_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $c_3=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ olup $y(x)=-e^{2x}+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)e^{\sqrt{3}x}+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\sqrt{3}x}$ olur.

CamScanner ile tarandı

③ $\{1, x, e^{2x}, e^{-2x}\}$

$$W(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & e^{2x} & e^{-2x} \\ 0 & 1 & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ 0 & 0 & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \\ 0 & 0 & 8e^{2x} & -8e^{-2x} \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ 0 & 4e^{2x} & 4e^{-2x} \\ 0 & 8e^{2x} & -8e^{-2x} \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4e^{2x} & 4e^{-2x} \\ 8e^{2x} & -8e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$= -32-32 = -64 \neq 0$

olduğu için bu fonksiyonlar lineer bağımsız olup $T=\{1, x, e^{2x}, e^{-2x}\}$ temel çözüm kümesidir.

Diferansiyel denklem $W(x, y)=0$ eşitliğinden determinant hesabı ile bulunabilir veya

1 ve x için $\lambda=0$ katlı kök yani λ^2 çarpan
e^{2x} için $\lambda=2 \Rightarrow \lambda-2$ çarpan
e^{-2x} için $\lambda=-2 \Rightarrow \lambda+2$ çarp

$$C(\lambda)=\lambda^2(\lambda-2)(\lambda+2) = \lambda^2(\lambda^2-4) = \lambda^4-4\lambda^2$$

karakteristik polinomuna karşılık gelen dif. denk. $y^{(4)}-4y''=0$ bulunur.

④ $y''+2y'+y=\dfrac{x^2}{e^x} \Rightarrow y''+2y'+y=x^2e^{-x}$ şeklindedir.

$y''+2y'+y=0 \Rightarrow \lambda^2+2\lambda+1=0 \Rightarrow (\lambda+1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1 \Rightarrow y_1=e^{-x}$
katlı kök $y_2=xe^{-x}$

$y_h=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$ olur.

Ters operatör yöntemi ile $y_ö=\dfrac{1}{(D+1)^2}e^{-x}x^2 = e^{-x}\dfrac{1}{D^2}x^2 = e^{-x}\dfrac{1}{D}\dfrac{x^3}{3}$
$D \to D-1$
$y_ö=e^{-x}\dfrac{x^4}{12}$ bulunur.

Genel çözüm $y=y_h+y_ö=e^{-x}(c_1+c_2x)+\dfrac{e^{-x}x^4}{12}$ olur.

⑤ $y'''+9y'=\sin 3x$

$y'''+9y'=0 \Rightarrow \lambda^3+9\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2+9)=0 \Rightarrow \lambda_1=0 \Rightarrow y_1=1$
$\lambda^2+9=0 \Rightarrow \lambda_2=3i \Rightarrow y_2=\cos 3x$
$\lambda_3=-3i \Rightarrow y_3=\sin 3x$

$y_h=c_1+c_2\cos 3x+c_3\sin 3x$ olur.

Ters operatör ile $y_ö=\dfrac{1}{D(D^2+9)}\sin 3x$
$D^2 \to -9$ yazılırsa payda 0 oluyor. Bu durumda

$y_ö=\operatorname{Im} v(x)$, $v(x)=\dfrac{1}{D(D^2+9)}e^{3ix}=\dfrac{1}{D(D+3i)(D-3i)}e^{3ix}=-\dfrac{1}{18}\dfrac{1}{D-3i}e^{3ix}$
$3i \quad 3i$ $\qquad D \to D+3i$

$y_ö=-\dfrac{1}{18}x\sin 3x$ olur. $\quad =-\dfrac{1}{18}e^{3ix}\dfrac{1}{D}.1=-\dfrac{1}{18}e^{3ix}.x=-\dfrac{1}{18}x(\cos 3x+i\sin 3x)$

Genel çözüm $y=y_h+y_ö=c_1+c_2\cos 3x+c_3\sin 3x-\dfrac{1}{18}x\sin 3x$ bulunur.

⑥ $y'''+y'=\dfrac{1}{\cos x}$

$y'''+y'=0$
$\lambda^3+\lambda=0$
$\lambda(\lambda^2+1)=0$
$\lambda_1=0 \quad \lambda_{2,3}=\mp i$

$y_1=1$
$y_2=\cos x$
$y_3=\sin x$
$y_h=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$

Özel çözüm sabitin değişimi yöntemi ile
$y_ö=c_1(x).1+c_2(x)\cos x+c_3(x)\sin x$ formunda aranır.

$$\left.\begin{aligned} &c_1'(x).1+c_2'(x)\cos x+c_3'(x)\sin x=0 \\ &c_1'(x).0-c_2'(x)\sin x+c_3'(x)\cos x=0 \\ &c_1'(x).0-c_2'(x)\cos x-c_3'(x)\sin x=\frac{1}{\cos x}\end{aligned}\right\}$$

yok etme yöntemi (veya Cramer yöntemi ile çözülürse)

$\sin x /\ -c_2'(x)\sin x+c_3'(x)\cos x=0$
$\cos x /\ -c_2'(x)\cos x-c_3'(x)\sin x=\dfrac{1}{\cos x}$
$\Rightarrow -c_2'(x)=1 \Rightarrow c_2'(x)=-1 \Rightarrow \boxed{c_2(x)=-x}$

$c_2'(x)=-1 \Rightarrow c_3'(x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \boxed{c_3(x)=\ln(\cos x)}$

$c_1'(x)=-c_2'(x)\cos x-c_3'(x)\sin x=\cos x+\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}=\dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow c_1(x)=\int \sec x\,dx$
$\Rightarrow \boxed{c_1(x)=\ln|\sec x+\tan x|}$

$y_ö=\ln|\sec x+\tan x|-x\cos x+\ln(\cos x)\sin x$ bulunur.

Genel çözüm
$y=y_h+y_ö=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x+\ln|\sec x+\tan x|-x\cos x+\ln(\cos x).\sin x$ bulunur.

CamScanner ile tarandı